

OM POTENSER AF EN COMPLEX VARIABEL.

AKADEMISK AFHANDLING,

SOM, MED TILLSTÅND AF

VIDTBERÖMDA PHILOSOPHISKA FACULTETEN I LUND,

FÖR PHILOSOPHISKA GRADENS VINNANDE,

TILL OFFENTLIG GRANSKNING FRAMSTÄLLES

AF

MAC BERLIN,
PHILOS. CAND., SKÅN.,

Å AUDITORIET N:O 1, LÖRDAGEN DEN 9 MAJ 1868,

KL. 3 E. M.

LUND,

TRYCKT UTI BERLINGSKA BOKTRYCKERIET,
1868.



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41552409_0094

Inledning.

Om man tänker sig systemet af alla *reella* storheter under den geometriska bilden af en rät linie, hvilken, utgående från en fast punkt (nollpunkten), förlöper i oändlighet åt båda sidor, så att hvarje uppgifvet talvärde (a) motsvaras af den punkt på denna räta linie, hvars afstånd från nollpunkten, räknadt åt ena eller andra sidan, allteftersom a har tecknet $+$ eller $-$, är $= a$; så ligger den frågan ganska nära, hvilken punkt man skall tänka sig motsvara en *complex* storhet ($a + bi$), hvarest a och b äro reella (positiva eller negativa) storheter, och i betyder $\sqrt{-1}$. Nu förer hvarje särskildt åt a tilldeladt talvärde med sig ett helt system af complexa storheter, i det man bibehållande a oförändradt kan tilldela b alla reella värden från $+\infty$ till $-\infty$. Detta system bör då äfven i sin ordning geometriskt betecknas genom en rät linie, hvilken passerar genom den punkt, som motsvarar storheten a (emedan $a + bi$ blir $= a$, då b antager värdet 0), och derifrån förtgår i oändlighet åt båda sidor, så att hvar och en af de complexa storheter, hvilkas reella term är $= a$, motsvaras af den punkt på denna räta linie, hvars afstånd från den storheten a motsvarande punkten är lika med det värde, som i samma complexa storhet tillkommer koefficienten för i . Denna räta linie får emellertid ej sammanfalla med den förut omnämnda räta linie, som betecknar systemet af de reella storheterna, utan måste med densamma bilda en viss vinkel, emedan i annat fall båda storheterna $a + b$ och $a + bi$ skulle få samma geometriska betydelse. Kalla vi vinkeln mellan de båda linierna för α , så blir

följaktligen den geometriska betydelsen af i , satt såsom faktor till b , att längden b icke skall mätas i samma riktning, som förut, utan i en, som med denna bildar vinkeln α . Då bör äfven storheten $a + i \cdot (bi)$ beteckna den punkt, till hvilken man kommer genom att afsätta längden b i en riktning, som med denna sednare bildar samma vinkel (α) och således med den linie, som betecknar de reella storheternas system, bildar vinkeln 2α . Nu är i sjelfva verket $a + i \cdot (bi) = a - b$, således kommer man till den ifrågavarande punkten genom att mäta längden b i alldeles motsatt riktning mot den, i hvilken man skulle mäta den, för att komma till den punkt, som betecknar storheten $a + b$. Följaktligen är $2\alpha = \pi$, och således $\alpha = \frac{\pi}{2}$, eller den rätta linie, som betecknar systemet af de complexa storheter, hvilkas reella term är a , bör tänkas *vinkelrät* mot den, som betecknar de reella storheternas system.¹⁾ I det följande skola vi för mera korthets skull kalla den punkt, som motsvarar storheten $a + bi$, för punkten $a + bi$. Likaledes komma vi att begagna sådana uttryck, som "en storhets läge," "storhetslinie," "storhetsplan" o. s. v., i st. f. den punkts läge, genom hvilken storheten representeras, den linie eller det plan, som representerar ett system af storheter o. s. v.

Låter man nu punkten a continuerligt beskrifva hela den reella storhetslinien, så kommer den mot denna vinkelräta, genom a dragna linie, om hvilken vi ofvanföre talat, att beskrifva ett plan, i hvilket alla complexa storheter äro belägna. Tager man i detta plan nollpunkten till origo och den reella storhetslinien till x -axel, så kommer hvarje complex storhet, låt vara $z = x + y i$, att till sitt läge bestämmas genom de rätvinkliga linearcoordinaterna x och y . Det förhållande,

¹⁾ Redan framställningen af de reella storheternas system under ofvananförda geometriska bild förutsätter bestämningen af tre fullkomligt arbiträra saker, nemligen en utgångspunkt, hvarifrån, en längdenhet, hvarmed, och en riktning, hvari afstånden mätas. Då man derefter äfven skall föreställa sig systemet af de complexa storheter, hvilkas reella term är a , såsom en rät linie, så äro utgångspunkten och längdenheten redan bestämda, riktningen deremot är ännu ej fullständigt bestämd, i det man om densamma blott vet, att den skall vara vinkelrät mot den förra riktningen, d. v. s. att den skall ligga i ett mot denna vinkelrätt plan. Sedan vi äfven fixerat denna arbiträra riktning, hafva vi fullständigt bestämt, hvilken punkt, som motsvarar den complexa storheten $a + bi$. Detta kan äfven (jfr CRELLE's Journal, Bd. 55, pag. 222) uttryckas så, att man för den geometriska framställningen af complexa storheter måste fixera ett *plan* och i detta tvenne punkter, af hvilka den ena representerar *noll*, och den andra *ett*.

som eger rum mellan reella storheter, storheter af formen bi ²⁾ och complexa storheter, att nemligen de complexa storheterna innefatta både de reella och de imaginära under sig såsom special-fall, finna vi således geometriskt betecknas derigenom, att de complexa storheterna tänkas utgöra ett plan, i hvilket de reella och de imaginära storheterna bilda tvenne mot hvarandra vinkelräta räta linier, hvilka man tager till coordinataxlar, då man begagnar linearcoordinater. Införas i stället polarcoordinater, så tager man den reella storhetslinien till fundamental-axel. Man har då $z = r \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi) = r \cdot e^{i\varphi}$.

En reell storhet kan ej förändras i mera än två riktningar, i det den nemligen kan beskrifva den reella storhetslinien åt ena eller andra sidan. En complex storhet kan deremot förändras i alla inom det complexa storhetsplanet fallande riktningar. Först då man erhållit en eqvation mellan x och y , eller mellan r och φ , vet man, huru z kommer att förändras; z kommer nemligen då att beskrifva den curva, som denna eqvation representerar.

Antaga vi nu, att en annan complex variabel, $w = u + vi = \varrho \cdot (\cos \psi + i \sin \psi) = \varrho \cdot e^{i\psi}$, är förbunden med z genom eqvationen $w = F(z)$, så måste, då z förändras, äfven w förändras. Således kommer äfven w att beskrifva en viss curva i det complexa storhetsplanet. Dessa båda curvor kalla vi korteligen " z -curvan" och " w -curvan." Eqvationen för w -curvan erhålles derigenom, att man ur någon af eqvationerna

$$\left\{ \begin{array}{l} u + vi, \\ \varrho \cdot (\cos \psi + i \sin \psi), \\ \text{eller } \varrho \cdot e^{i\psi} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} F(x + yi), \\ F[r \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi)], \text{ eller } \\ F(r \cdot e^{i\varphi}) \end{array} \right\} \quad 3)$$

genom att skilja det reella och det imaginära bildar tvenne eqvationer och sedan ur dessa och z -curvans eqvation eliminerar z -coordinaterna.

I föreliggande afhandling komma vi att undersöka w -curvans beroende af z -curvan, i den händelse att w är en potens af z .

²⁾ För dessa storheter vilja vi bibehålla den gamla benämningen *imaginära*, för att skilja dem från de *complexa*, hvilka äro *sammansatta* af en reell del och en imaginär.

³⁾ Vi uppställa eqvationerna på detta sätt, för att antyda, att man mycket väl kan begagna rätliniga coordinater i den ena och polarcoordinater i den andra curvans eqvation. Är t. ex. $w = \log z$, har man allt skäl att så förfara.

I.

Till en början antaga vi exponenten vara en reell storhet. Man har då $\varrho \cdot e^{i\psi} = r \cdot e^{in\varphi}$, således

$$\varrho = r^n, \quad \psi = n\varphi.$$

Det är bekant, att anomalien φ bestämmer samma rigtning i planet, om den ökas med 2π , 4π , 6π o. s. v. Härigenom antager ψ värdena $n\varphi$, $n\varphi + 2n\pi$, $n\varphi + 4n\pi$, $n\varphi + 6n\pi$ o. s. v.; men dessa värden bestämma blott då samma rigtning, när n är ett helt tal; om n är ett brutet tal, låt vara $\frac{p}{q}$ (hvarest p och q äro hela tal), så komma q stycken af dem att bestämma olika rigtningar. Således motsvaras i denna händelse hvarje värde på z af q stycken olika värden på w . De olika värden på ϱ , som skulle kunna härledas ur eqvationen $\varrho = r^n$, behöfva ej göra någon svårighet, emedan man engång för alla kan öfverenskomma att alltid taga ϱ reellt och positivt; om man ej gjorde detta, skulle man förfrikt blott återkomma till samma olika värden på w , som gifvas genom de olika värdena på ψ . Dessa olika värden komma vi att benämna $w_1, w_2, w_3, \dots$; $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \dots$. Vi skola framdeles se, huru de i vissa fall öfvergå i hvarandra. Är deremot n ett helt tal, så eger w icke mer, än ett enda värde svarande mot hvarje värde på z .

Eqvationerna $\varrho = r^n$ och $\psi = n\varphi$

gifva genom differentiation $\frac{d\varrho}{dr} = nr^{n-1}$ och $\frac{d\psi}{d\varphi} = n$, hvarur man erhåller

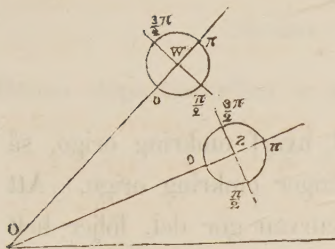
$$\frac{1}{\varrho} \cdot \frac{d\varrho}{d\psi} = \frac{1}{r} \cdot \frac{dr}{d\varphi}.$$

Geometriskt uttrycker denna eqvation, att den trigonometriska cotangenten för vinkeln mellan radius vector och tangenten är i båda curvorna för motsvarande punkter densamma. Om vi beteckna dessa vinklar med A^w och A^z , så är följaktligen antingen $A^w - A^z = 0$, eller $A^w - A^z = \pi$.

Vi öfverenskomma att alltid mäta A^w och A^z från radius vector åt venster till den del af curvans tangent, som från tangeringspunkten utgår i samma rigtning, som w och z sjelfva beskrifva sina curvor. Då gäller följande (Fig. 1):

a) Om n är positivt, så måste, enligt eqvationen $\varrho = r^n$, ϱ och r samtidigt till- och aftaga, likaledes måste, enligt eqvationen $\psi = n\varphi$, ψ och φ samtidigt

Fig. 1.



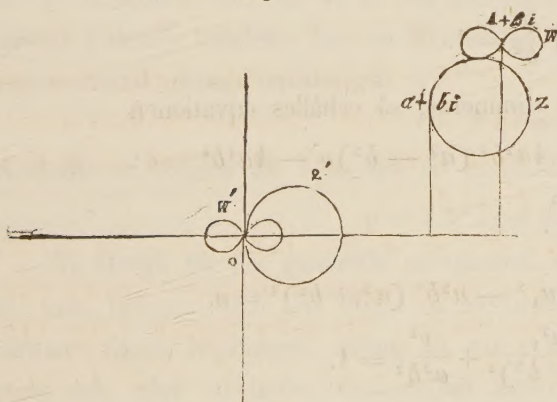
till- och aftaga. Ligger nu A^z i första kvadranten, så komma både r och φ att aftaga. Således måste i detta fall äfven både ρ och ψ aftaga, och således A^w äfven ligga i första kvadranten. På samma sätt finner man, att, om A^z ligger i andra, tredje och fjärde kvadranten, A^w äfven måste ligga i andra, tredje och fjärde kvadranten. Följaktligen kunna vi, om n är positivt, aldrig få $A^w - A^z = \pi$, hvadan vi här hafva $A^w - A^z = 0$.

b) Är deremot n negativt, så måste ρ tilltaga, då r aftager, och tvärtom. Likaledes måste ψ tilltaga, då φ aftager, och tvärtom. Ligger nu A^z i första kvadranten, så att både r och φ aftaga, så måste både ρ och ψ tilltaga, och följaktligen A^w ligga i tredje kvadranten. På samma sätt inses, att, om A^z ligger i andra, tredje och fjärde kvadranten, A^w måste ligga fjärde, första och andra. Således hafva vi här $A^w - A^z = \pi$.

Vi skola framdeles lära känna den generella sats, af hvilken ofvanstående utgör ett special-fall.

Om man har $w = A + Bi + (z - (a + bi))^n$, så kan man sätta $z^1 = z - (a + bi)$ och $w^1 = w - (A + Bi)$. Beskriver nu z en viss curva, så kommer z^1 att beskriva en med denna congruent curva, som har fullkomligt samma läge i förhållande till origo, som z -curvan har i förhållande till punkten $a + bi$. Likaledes beskriver w en curva fullt congruent med den, som w^1 beskriver,

Fig. 2.



och med alldeles samma läge i förhållande till punkten $A + Bi$, som w^1 -curvan har i förhållande till origo. Då nu w^1 och z^1 äro förbundna genom equationen $w^1 = (z^1)^n$, så inser man, att undersökningen af den curva, som $w = A + Bi + (z - (a + bi))^n$ beskriver, under det z beskriver en känd curva, helt och hållet återföres till enahanda undersökning öfver $w = z^n$.

Fig. 2 framställer det fall, då z beskriver en cirkel, som går igenom

punkten $a + bi$ och tangeras af denna punkts ordinata, samt w bestämmes genom eqvationen $w = A + Bi + (z - (a + bi))^{1/2}$.

Vi återgå till eqvationen $w = z^n$ och antaga,

A) att n är positivt, samt

1) att n är ett helt tal.

Låta vi nu z beskrifva en curva, som sluter sig ett hvarf omkring origo, så kommer w att beskrifva en curva, som sluter sig n gånger omkring origo. Att här w -curvan måste sluta sig tillsammans, så framt z -curvan gör det, följer helt enkelt deraf, att endast ett värde på w svarar mot hvarje särskildt värde på z .

Ett anmärkningsvärdt fall är det, som härvid inträffar, om z -curvan är så beskaffad, att den radius vector, som deri svarar mot en viss anomali, φ , alltjemnt är lika med den, som svarar mot anomalierna $\varphi + \frac{2\pi}{n}$, $\varphi + \frac{4\pi}{n}$, $\varphi + \frac{6\pi}{n}$ o. s. v. Då komma nemligen de olika hvarfven af w -curvan att sammanfalla med hvarandra.

Det enklaste exempel härpå erbjuder en med origo till medelpunkt uppritad cirkel: under det z beskriver denna en gång, kommer w att n gånger beskrifva en cirkel, i hvilken likaledes origo är medelpunkt, och hvars radie är $= r^n$.

Ett annat fall af samma slag är det, då z beskriver en ellips med origo till medelpunkt, och man har $w = z^2$.

Begagna vi här rätliniga coordinater, så är

$$u + vi = (x + yi)^2;$$

$$\text{således } u = x^2 - y^2, \quad v = 2xy.$$

$$\text{Vidare är } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Om ur dessa tre eqvationer x och y elimineras, så erhålles eqvationen

$$(a^2 + b^2)^2 v^2 + 4a^2 b^2 u^2 - 4a^2 b^2 (a^2 - b^2) u - 4a^4 b^4 = 0;$$

eller, om man inför $u_1 = u - \frac{a^2 - b^2}{2}$,

$$(a^2 + b^2)^2 v^2 + 4a^2 b^2 u_1^2 - a^2 b^2 (a^2 + b^2)^2 = 0,$$

$$\text{hvarur } \frac{4u_1^2}{(a^2 + b^2)^2} + \frac{v^2}{a^2 b^2} = 1.$$

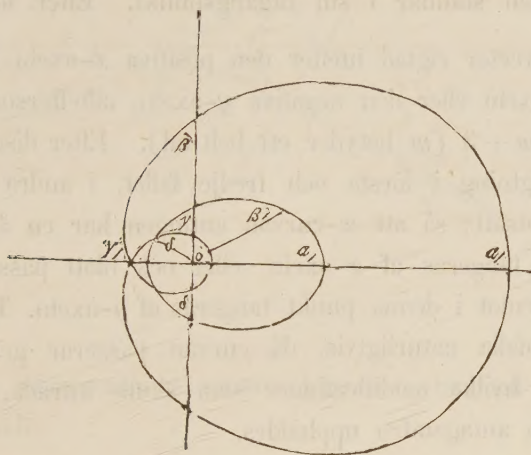
Således beskriver i detta fall äfven w en ellips, men i denna är ej origo, utan

punkten $\frac{a^2 - b^2}{2}$ medelpunkt. Deremot är origo ena brännpunkten i denna ellips,

$$\text{emedan } \frac{(a^2 + b^2)^2}{4} - a^2 b^2 = \frac{(a^2 - b^2)^2}{4}.$$

Denna ellips beskriver w två gånger, under det z beskriver sin en gång.

Fig. 3.



Låter man deremot z t. ex. beskrifva en ellips, inom hvilken origo ligger, utan att vara dess medelpunkt, så kommer $w = z^2$ att beskrifva den curva, som Fig. 3 framställer. De på figuren med samma bokstäver betecknade vinklarne äro lika stora.

Tänkes nu z -ellipsen förskjuten åt höger så långt, att dess spets sammanfaller med origo, så kommer äfven punkten γ att sammanfalla med origo,

och hela den del af ellipsen, som på figuren ligger venster om räta linien $o\gamma\beta$, sammansjunker till punkten o , så att, i det ögonblick z passerar genom denna punkt, får anomalien φ tillskottet π . På samma gång sammansjunker äfven det inre hvarfvat af w -curvan till punkten o , och, då w passerar genom denna punkt, får ψ tillskottet 2π , d. v. s. den återtager sitt värde, hvaraf man ser, att w -curvan i denna händelse har en återvändspunkt i origo. Vore z -ellipsen en cirkel, representerad genom eqvationen

$$r = 2 a \cos \varphi,$$

så skulle w komma att beskrifva en cardioide, representerad genom eqvationen

$$\varrho = 2 a^2 (\cos \psi + 1).$$

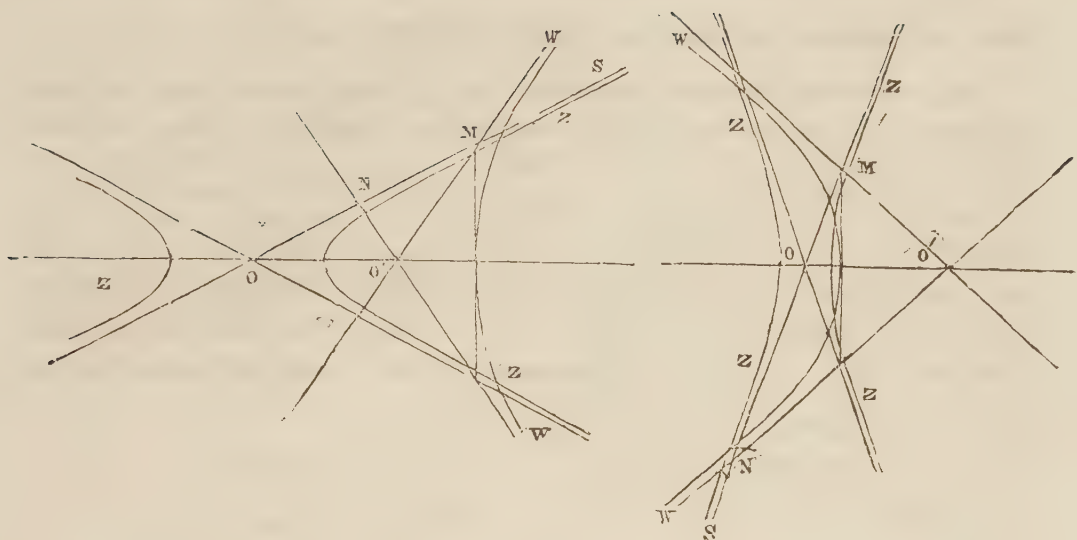
Vi återgå till det generella antagandet, att n betyder hvilket helt och positivt tal, man behagar, och låta äfven nu z -curvan passera genom origo; men, för att närmare fixera begreppen, antaga vi, att z utgår från en punkt på fundamentalaxeln och, efter att hafva continuerligt beskrifvit sin curva, dit återvänder, samt att z -curvans tangent i origo är vinkelrät mot fundamentalaxeln. Då växer φ

continuerligt från 0 till $\frac{\pi}{2}$, springer sedan öfver till $\frac{3\pi}{2}$ och växer derefter continuerligt till 2π . Härunder kommer w att först beskrifva $\frac{n}{4}$ hela hvarf omkring origo, derefter sammansjunga $\frac{n}{2}$ hvarf till en enda punkt (origo), och slutligen beskrifver w ytterligare $\frac{n}{4}$ hvarf och stannar i sin utgångspunkt. Efter första delen af denna rörelse är radius vector rigtad utefter den positiva x -axeln, den positiva y -axeln, den negativa x -axeln eller den negativa y -axeln, allteftersom n är $= 4m$, $4m + 1$, $4m + 2$ eller $4m + 3$ (m betyder ett helt tal). Efter discontinuiteten återtager den samma rigtning i första och tredje fallet, i andra och fjärde får den deremot en rakt motsatt; så att w -curvan antingen har en återvändspunkt i origo och derstädes tangeras af x -axeln, eller ock blott passerar genom origo, i hvilket fall den deremot i denna punkt tangeras af y -axeln. Tangenten och radius vector sammanfalla naturligtvis, då curvan passerar genom origo. Man inser utan svårighet, hvilka modificationer som skulle inträda, om ett eller annat af våra ofvan gjorda antaganden upphäfdes.

Låter man z -curvan hvarken passera genom eller omsluta origo, så bliver φ inneslutet inom vissa gränser. Följaktligen bliver äfven ψ inneslutet inom vissa gränser, men dessa blifva n gånger vidare, än de förra. Låter man t. ex. α vara det största värde, φ kan erhålla, så att α betyder lutningsvinkeln mellan fundamentalaxeln och den från origo dragna tangenten till z -curvan, så blir $n \cdot \alpha$ lutningsvinkeln mellan samma linier i w -curvan. Nu kan det mycket väl hända, att $n \cdot \alpha$ är större än 2π , så att w , redan då z kommer till tangeringspunkten, beskrifvit ett eller annat hvarf omkring origo; men, om φ derefter continuerligt återgår till 0, måste ψ göra detsamma, hvarigenom de af w beskrifna hvarfven blifva, att jag så må säga, åter afnystade.

Ett enkelt fall af detta slag är det, då z beskrifver en hyperbel med origo till centrum, och w är $= z^2$; w beskrifver då en hyperbel med dubbelt så stor vinkel mellan asymptoterna, i hvars ena focus man har origo (Fig. 4). Införas nemligen rärliniga coordinater, så fås en eqvation, som ej har någon annan olikhet med den på sid. 6 betraktade ellipsens, än att tecknet för b^2 är motsatt. Afståndet från origo till w -hyperbelus medelpunkt är $= \frac{a^2 + b^2}{2}$, och den eqvation,

Fig. 4.



som representerar samma hyperbel, hänförd till sitt centrum såsom origo, är följande:

$$\frac{4u_1^2}{(a^2 - b^2)^2} - \frac{v^2}{a^2 b^2} = 1.$$

Det är emellertid endast den ena branchen af denna hyperbel, som w beskriver, under det z beskriver båda brancherna af sin. Den andra branchen är främmande för frågan. Huruvida den af w beskrifna branchen är den, som vänder convexa eller concava sidan mot origo, beror på, om vinkeln mellan z -hyperbelns asymptoter är spetsig eller trubbig. Är denna vinkel rät, d. v. s. är z -hyperbeln liksidig, så öfvergår w -hyperbeln till en rät linie, dragen vinkelrät mot x -axeln genom punkten a^2 .

Det förtjenar anmärkas, att linierna oo^1 och o^1m äro lika stora, att i punkten m sammanträffa båda hyperblarnes asymptoter och w -hyperbelns tangent i dess spets, samt att vinkeln o^1ns är tre gånger så stor som vinkeln o^1mo .

Antaga vi nu,

2) att n är ett brutet tal, låt vara $\frac{p}{q}$, så svara, såsom ofvan är nämnt, q stycken olika w -värden mot hvarje z -värde. Emellertid äro radii vectores för alla dessa w -värden sinsemellan lika, det är blott anomalierna, som skiljer dem åt;

de ligga således alla på samma ur origo såsom medelpunkt uppritade cirkel. Vidare är skillnaden mellan deras anomalier constant och $= \frac{2\pi}{q}$.

Låt z beskrifva en curva, som sluter sig ett hvarf omkring origo, så kommer hvart och ett af de q stycken w -värdena att beskrifva en båge, som sedd från origo upptager vinkeln $\frac{p}{q} \cdot 2\pi = p \cdot \frac{2\pi}{q}$; så att, då z återkommer till sin utgångspunkt, har ψ_1 öfvergått till ψ_{p+1} , ψ_2 till ψ_{p+2} , ψ_3 till ψ_{p+3} o. s. v., och således har äfven, eftersom alla radii vectores för utgångsvärdena äro lika, w_1 öfvergått till w_{p+1} , w_2 till w_{p+2} , w_3 till w_{p+3} o. s. v. Härvid bör man, då index för ett w -värde blifver större än q , ihågkomma, att w_{p+n} betecknar samma punkt, som w_{p+n-q} , w_{p+n-2q} , w_{p+n-3q} o. s. v.

Fig. 5 A.

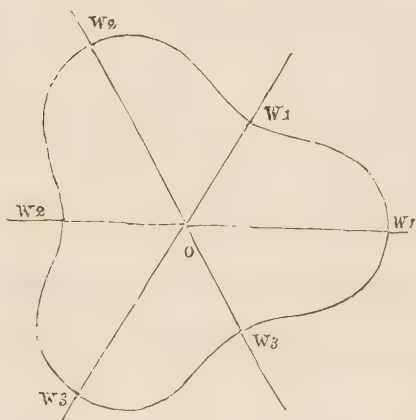


Fig. 5 B.

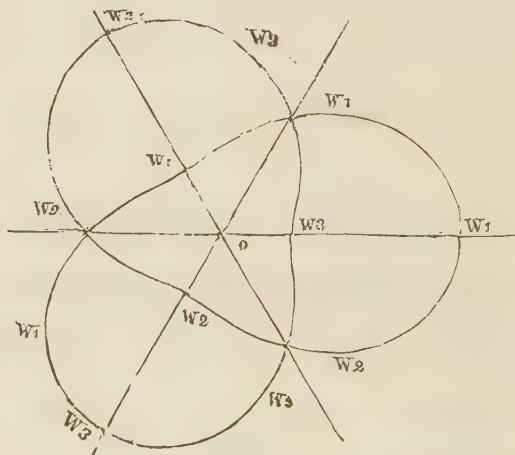


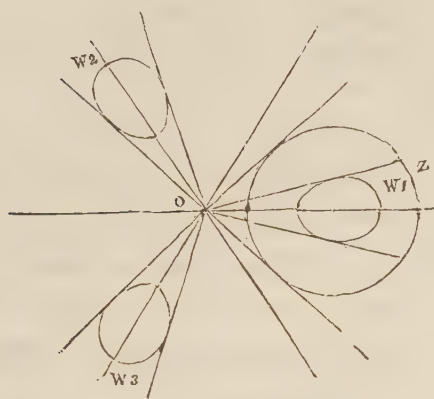
Fig. 5 A visar, huru dessa öfvergångar ske, då n är $= \frac{1}{3}$, och Fig. 5 B, då det är $= \frac{2}{3}$, samt z beskrifver en cirkel, inom hvilken origo ligger, utan att vara dess medelpunkt. För att ej göra figuren otydlig, utlemnas denna cirkel.

Låta vi deremot z beskrifva en curva, som hvarken omsluter eller passerar genom origo, och dervid antaga, att z utgår från en punkt på fundamentalaxeln, så gälla följande resonnementer:

Utgångsvärdet för φ är o , och de q stycken olika utgångsvärdena för ψ äro $\psi_1 = o$, $\psi_2 = \frac{2\pi}{q}$, $\psi_3 = \frac{4\pi}{q}$ o. s. v. Då nu, under det z fortgår på sin curva,

φ når sitt maximivärde, låt vara α , så uppnå samtidigt $\psi_1, \psi_2, \psi_3 \dots$ sina maximivärden, hvilka äro $n\alpha, \frac{2\pi}{q} + n\alpha, \frac{4\pi}{q} + n\alpha \dots$. Om derefter, under det z fortsätter sin väg, φ åter aftager, tills det blir 0, måste äfven $\psi_1, \psi_2, \psi_3 \dots$ återgå till värdena $0, \frac{2\pi}{q}, \frac{4\pi}{q} \dots$. Beskrifver derefter z en dylik båge på andra sidan om fundamentalaxeln, så att φ åt denna sida aftager till ett visst minimivärde, låt vara $-\beta$, och sedan åter växer till värdet 0, så måste liksom förut hvar och en af anomalierna $\psi_1, \psi_2, \psi_3 \dots$ göra digressionen $-n\beta$ och derefter återgå till

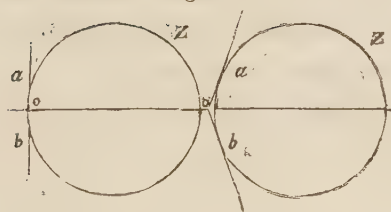
Fig. 6.



sitt utgångsvärde. Har nu z beskrifvit en sluten curva, så att äfven dess radius vector återtagit sin ursprungliga längd, så måste äfven $w_1, w_2, w_3 \dots$ hafva beskrifvit hvardera sin slutna curva, emedan då äfven deras radius vector ($\rho = r^n$) måste hafva återtagit sin ursprungliga längd.

Fig. 6 framställer det fall, då n är $= \frac{1}{3}$, och z beskrifver en cirkel, hvars medelpunkt ligger på fundamentalaxeln.

Fig. 7.



För att förbereda öfvergången till det fall, då z -curvan passerar genom origo, antag (Fig. 7), a) att origo ligger ett oändligt litet stycke innanför z -curvan, och b) att origo ligger ett oändligt litet stycke utanför z -curvan. Antag vidare, för att fixera begreppen, att z -curvas tangent i dess närmast origo belägna punkt är vinkelrät mot fundamentalaxeln. Det möter ingen svårighet att inse, hvilken modification som skulle inträda, om dessa linier bildade någon annan vinkel med hvarandra. Under det, i fallet a), z beskrifver den

oändligt lilla bågen ab , öfvergår φ från $\frac{\pi}{2}$ genom π till $\frac{3\pi}{2}$. Härunder måste äfven $w_1, w_2, w_3 \dots$ beskrifva hvar sin oändligt lilla och oändligt nära intill origo belägna båge, emedan deras radius vector ($\rho = r^n$) blir oändligt liten på

samma gång som r . Vidare måste ψ_1 öfvergå från $n \cdot \frac{\pi}{2}$ till $n \cdot \frac{3\pi}{2}$, ψ_2 från $n \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{q}$ till $n \cdot \frac{3\pi}{2} + \frac{2\pi}{q}$, ψ_3 från $n \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{4\pi}{q}$ till $n \cdot \frac{3\pi}{2} + \frac{4\pi}{q}$ o. s. v.; så att alla blifva ökade med $n\pi$. I fallet b) kommer deremot, under det z äfven här beskriver den oändligt lilla bågen ab , och $w_1, w_2, w_3 \dots$ beskrifva hvar sin oändligt lilla båge, φ att från $\frac{\pi}{2} - \varepsilon$ genom 0 aftaga till $-\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right)$. Då måste äfven hvardera af anomalierne $\psi_1, \psi_2, \psi_3 \dots$ minskas med $n\pi - 2n\varepsilon$. Vid limes försvinner ε , och båda de nu nämnda öfvergångarne ske omedelbart, men limes för begge fallen a) och b) är gemensam, nemligen att origo ligger på sjelfva z -curvan. I denna händelse kommer således hvardera af vinklarne $\psi_1, \psi_2, \psi_3 \dots$ att springa öfver till två olika värden, nemligen ψ_1 till $\psi_1 + n\pi$ och $\psi_1 - n\pi$, ψ_2 till $\psi_2 + n\pi$ och $\psi_2 - n\pi$, ψ_3 till $\psi_3 + n\pi$ och $\psi_3 - n\pi$ o. s. v.

Fig. 8.

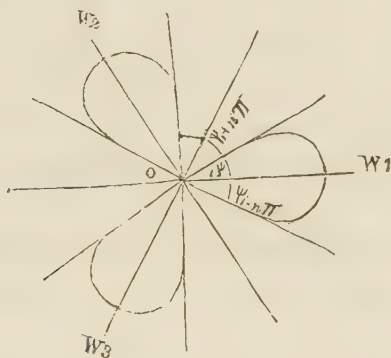


Fig. 8 visar, huru Fig. 5 A och Fig. 6 komma att taga sig ut vid limes.⁴⁾

Vi vilja med ett enkelt exempel visa, huru saken presenterar sig, då man begagnar rätliniga coordinater.

Antag $w = z^{1/2}$ och låt z beskrifva en cirkel, hvars medelpunkt ligger på x -axeln, på afståndet A från origo, och hvars radie är R .

Vi hafva här $x = u^2 - v^2$, $y = 2uv$.

Insättas dessa värden i cirkelns eqvation:

$$(x - A)^2 + y^2 = R^2,$$

så erhålles eqvationen

$$(u^2 + v^2)^2 - 2A(u^2 - v^2) + A^2 = R^2.$$

Sättes här $v = 0$, så finner man, att de punkter, i hvilka curvan skär

⁴⁾ Vore förändringen af φ icke $\pm\pi$, utan t. ex. $\pm\vartheta$, d. v. s. hade z -curvan sjelf en förgreningspunkt i origo, så skulle naturligtvis förändringen af ψ blifva $\pm n\vartheta$. (Jfr LIOUVILLE's Journal, Tom. XV, pag. 423, not.)

u -axeln, äro $u = \pm \sqrt{A \pm R}$. De punkter, i hvilka den skär v -axeln, äro $v = \pm \sqrt{-A \pm R}$.

Är A positivt, måste således w -curvan,

1) om A är $> R$, skära u -axeln i fyra punkter, två på vardera sidan om origo, hvaremot den i detta fall ej träffar v -axeln. Curvan består således i detta fall af två skilda delar, en på vardera sidan om v -axeln. Dess utseende visas i Fig. 9 A.

2) Om A är $= R$, öfvergår curvan till en lemniskata, hvars brännpunkter ligga på u -axeln, på afståndet $\pm \sqrt{A}$ från origo. Fig. 9 B framställer detta fall.

3) Är $A < R$, kommer curvan att skära vardera axeln i två punkter, en på vardera sidan om origo. Att curvan i denna händelse bildar ett enda sammanhängande hvarf omkring origo, inses enklast deraf, att hvarje rät linie, som drages genom origo, träffar densamma i två (men också *blott* två) punkter, en på vardera sidan om origo. Detta fall framställer Fig. 9 C.

Fig. 9 A.

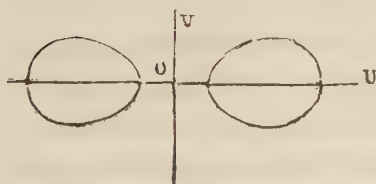


Fig. 9 B.

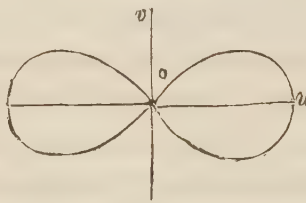
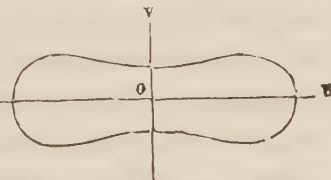


Fig. 9 C.



Är $A = 0$, öfvergår w -curvan till en cirkel.

Är A negativt, låt vara $A = -A^1$, antager w -curvan, i de tre fallen $A^1 < R$, $A^1 = R$ och $A^1 > R$, de gestalter, som framställas i Figg. 9 D, E, F.

Fig. 9 D.

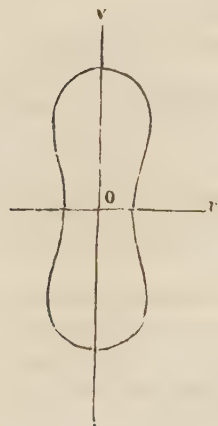


Fig. 9 E.

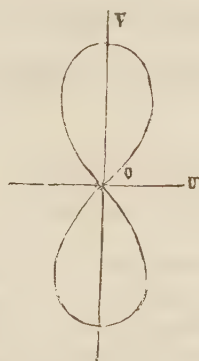
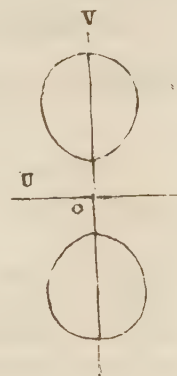


Fig. 9 F.



Bibehålla vi således z -cirkelns radie constant, men låta dess medelpunkt continuerligt beskrifva hela x -axeln från $+\infty$ till $-\infty$, så kommer w -curvan att genomgå ofvannämnda sju former, på det sätt att, då z -cirkelns medelpunkt ligger på afståndet $+\infty$ från origo, består w -curvan endast af tvenne punkter, hvilka äfven ligga på oändligt afstånd från origo, den ena åt positiva, den andra åt negativa sidan (båda på u -axeln); under det z -cirkeln närmar sig origo, utvidgas dessa punkter till tvenne symmetriska slutna curvor, hvilka på samma gång närma sig till origo. I det ögonblick z -cirkelns medelpunkt kommer på afståndet $+R$ från origo, så att origo ligger på samma cirkels periferi, sammansmälta de båda förut skilda delarne af w -curvan till en lemniskata. Omedelbart derefter öppnar sig denna, så att den öfvergår till en origo ett hvarf omslutande curva. Under det nu z -cirkelns medelpunkt går från $+R$ till origo, har w -curvan tvenne insänkningar i granskapet af de punkter, der den träffas af v -axeln. Dessa insänkningar utjemnas allt mer och mer, så att, då z -cirkelns medelpunkt sammanfaller med origo, försvinna de fullkomligt, och w -curvan öfvergår till en cirkel. Då z -cirkelns medelpunkt fortsätter sin väg, undergår w -curvan fullkomligt analoga förändringar i motsatt ordning: Först erhåller den tvenne insänkningar i granskapet af de punkter, der den träffas af u -axeln. Dessa växa allt mer och mer, så att, då z -cirkelns medelpunkt kommer till punkten $-R$, hoptränges w -curvan till en lemniskata, hvars brännpunkter ligga på v -axeln. Derefter delar sig denna i tvenne skilda curvor, hvilka aflägsna sig från origo utefter v -axeln, den ena åt positiva, den andra åt negativa sidan, och på samma gång sammansjunka, så att de, då afståndet från origo blifver oändligt, slutligen öfvergå till tvenne punkter.⁵⁾

B) Hitintills hafva vi alltjemnt antagit n vara positivt. För att nu öfvergå till det fall, då n blir negativt, låt till en början n vara $= -1$. Då är $\varrho = \frac{1}{r}$, och $\psi = -\varphi$.

Låt nu z beskrifva en curva, som hvarken passerar genom eller omsluter origo, ej heller i någon punkt faller på oändligt afstånd derifrån. Då är r allt-

⁵⁾ Vi hafva ofvan sett, att den nu betraktade curvan är genus i förhållande till lemniskatan såsom species. Den kan definieras såsom locus för alla de punkter, hvilkas afstånd från tvenne fasta punkter multiplicerade med hvarandra gifva en constant produkt. Som bekant är i lemniskatan denna constanta produkt $=$ quadraten på halfva afståndet mellan de fasta punkterna.

jemnt en finit, från o skild qvantitet, hvarföre detsamma gäller om φ , som är dess reciproka värde, φ varierar inom vissa gränser, hvarföre ψ måste variera inom gränser, som med dessa ligga symmetriskt i förhållande till fundamental-axeln. Sluter z -curvan sig tillsamman, måste w -curvan äfven göra det, emedan, då r och φ återtaga sina utgångsvärden, äfven φ och ψ måste återtaga sina. Fallar deremot någon del af z -curvan på oändligt afstånd från origo, så måste motsvarande del af w -curvan falla oändligt nära intill origo, eller w -curvan kommer att passera genom origo.

Om deremot z -curvan en eller flera gånger omsluter origo, måste äfven w -curvan lika många gånger omsluta origo; men, under det z beskriver sin curva i en rigtning, måste w beskrifva sin i den motsatta.

Låta vi slutligen z -curvan passera genom origo, så kommer den del af w -curvan, som motsvarar z -curvans närmast intill origo belägna del, att falla på oändligt afstånd och hafva till asymptot en linie, som med fundamentalaxeln bildar en lika stor vinkel, som z -curvans tangent i origo bildar med samma axel, men åt motsatta sidan. I det ögonblick z genomgår origo, och således φ gör ett språng (så framt icke z -curvan i origo har en återvändspunkt), kommer äfven ψ att göra ett lika stort språng åt motsatta sidan, och således w att hoppa öfver från en oändlig branche till en annan. Har z -curvan icke någon singulier punkt i origo, är förändringen af $\varphi = \pm\pi$, och således förändringen af $\psi = \mp\pi$, hvarföre i detta fall asymptoterna till de brancher, mellan hvilka w springer öfver, blifva diametralt motsatta. Har deremot z -curvan en förgreningspunkt i origo, så komma w -curvans asymptoter att med hvarandra bilda samma vinkel, som z -curvans tangenter i origo, och om φ antager de båda olika värdena $\varphi + n\pi$ och $\varphi - n\pi$ (se ofvan), så kommer ψ att antaga de båda olika värdena $\psi - n\pi$ och $\psi + n\pi$, så att w i detta fall springer öfver från en oändlig branche till två olika, hvilkas asymptoter åt hvardera sidan bilda lika stora vinklar med den förras. Har z -curvan en återvändspunkt i origo, så att φ ej blifver discontinuerligt, då z passerar genom denna punkt, så kommer ej heller ψ att blifva discontinuerligt, utan w -curvan har då två brancher med gemensam asymptot och således en återvändspunkt på oändligt afstånd, eller, om den har olika asymptoter, äro dessa åtminstone parallela, såsom förhållandet är med parabeln, hvilken kan sägas hafva två med dess axel parallela, på oändligt afstånd från densamma belägna, räta linier till asymptoter. Detta sistnämnda fall skola vi återkomma till i ett exempel.

Har z -curvan en slutpunkt i origo, så har w -curvan blott en oändlig branche. Är slutligen z -curvan en spiral, som genom oändligt många hvarf i oändlighet närmar sig intill origo, så är w -curvan likaledes en spiral, hvilken genom oändligt många hvarf, beskrifva i motsatt rigtning, i oändlighet aflägsnar sig från origo.

Vi vilja tillämpa ofvanstående på ett par exempel.

Ex. 1. Låt z beskrifva en cirkel, hvars medelpunkt ligger på fundamental-axeln, på afståndet A från origo, och hvars radie är R .

Eqvationen $w = z^{-1}$ ger, om vi införa linearcoordinater, $(u + vi) \cdot (x + yi) = 1$,

$$\text{hvarur erhålles } x = \frac{u}{u^2 + v^2}, \text{ och } y = \frac{-v}{u^2 + v^2}.$$

Insätts dessa värden i eqvationen

$$(x - A)^2 + y^2 = R^2,$$

så får man

$$\left(u - \frac{A}{A^2 - R^2}\right)^2 + v^2 = \frac{R^2}{(A^2 - R^2)^2}.$$

Således beskriver w en cirkel, hvars medelpunkt ligger på u -axeln, på afståndet $\frac{A}{A^2 - R^2}$ från origo, och hvars radie är $\frac{R}{A^2 - R^2}$. Blir nu $A = \pm R$, så blifva både afståndet från origo och radien oändliga; men i förra fallet blir skillnaden mellan, i sednare summan af begge dessa oändligheter sjelf finit och $= \pm \frac{1}{2R}$, så att cirkeln öfvergår till den rätta linie, som genom punkten $\pm \frac{1}{2R}$ drages parallel med v -axeln.

Anmärkningsvärd är förflyttningen af w -cirkelns medelpunkt, under det z -cirkelns medelpunkt föres uteder hela absciss-axeln, eller under det A continuerligt aftager från $+\infty$ till $-\infty$: då A aftager från $+\infty$ till $+R$, växer $\frac{A}{A^2 - R^2}$ continuerligt från 0 till $+\infty$; derefter springer den öfver till $-\infty$, och beskriver sedan continuerligt hela absciss-axeln från $-\infty$ till $+\infty$, under det A aftager från $+R$ till $-R$; nu springer den för andra gången öfver till $-\infty$, och går derefter continuerligt till 0, under det A går från $-R$ till $-\infty$.

Fästa vi oss vid det speciella läget $A = \pm R$ och låta z utgå från punkten $\pm 2R$ uppåt och i denna rigtning beskrifva sin cirkel, så utgår w från punkten $\pm \frac{1}{2R}$ och beskriver den nedre delen af sin rätta linie, under det z beskriver

den öfre halfcirkeln; när nu z kommer till origo, är $w = -i\infty$; derifrån springer w öfver till $+i\infty$, då z passerar genom origo; hvarefter det continuerligt beskrifver den öfre delen af sin rätta linie, under det z beskrifver sin nedre halfcirkel.

Om z - och w -cirklarne hafva ett sådant läge, att de skära hvarandra, så ligga skärningspunkterna på enhetens afstånd från origo, ty skärningspunkternas radii vectores måste både vara lika och hvarandras reciproka värden.

Ex. 2. Om z beskrifver cardiöiden

$$r = 2a^2 (\cos \varphi + 1) \quad (\text{se ofvan}),$$

så kommer $w = z^{-1}$ att beskrifva en curva, hvars eqvation fås genom att införa $1/\varrho$ i stället för r och $-\psi$ i stället för φ ; således

$$2a^2\varrho (\cos \psi + 1) = 1.$$

Detta är eqvationen för en parabel med origo till brännpunkt, och hvars spets ligger på afståndet $\frac{1}{4a^2}$ derifrån. Då z passerar genom origo, hvarest cardiöiden har en återvändspunkt, springer w öfver från den ena af parabelns yttersta, oändligt aflägsna punkter till den andra.

Ex. 3. Låt z beskrifva lemniskatan

$$(x^2 + y^2)^2 - 2A(x^2 - y^2) = 0 \quad (\text{se ofvan}).$$

Då beskrifver $w = z^{-1}$ en liksidig hyperbel, hvars eqvation är

$$u^2 - v^2 = \frac{1}{2A}.$$

Då z passerar genom förgreningspunkten i origo, springer w öfver från den ena af hyperbelns brancher till tvenne andra, emedan z här slår in på begge de olika vägar, hvilkas tangenter bilda vinklarne $\varphi_1 + \frac{\pi}{2}$ och $\varphi_1 - \frac{\pi}{2}$ med fundamentalaxeln, om φ_1 betyder anomalien för z vid ankomsten till origo.

Ofvanstående visar omedelbart öfver till det fall, då n har något annat negativt värde än -1 . Har man sålunda $w = z^{-m}$, hvarest m betyder en positiv storhet, så sätter man $w^1 = z^m$ och $w = \frac{1}{w^1}$, derefter öfvergår man först från kännedomen om z -curvan till w^1 -curvan och sedan från denna till w -curvan. De två sist anförda exemplen kunna således äfven anses såsom exempel på detta fall: de visa, hvilken curva w beskrifver, då z beskrifver en cirkel, som går

genom origo, och man har $w = z^{-2}$, eller $w = z^{-1/2}$. Förenade med hvarandra visa oss samma exempel, hvilken curva w beskriver, då z beskriver en lemniskata eller en liksidig hyperbel, och man har $w = z^{\pm 4}$.

II.

Antaga vi nu, att exponenten är en imaginär ⁶⁾ storhet, så att vi hafva $w = z^{mi}$; så erhålla vi, om vi begagna polar-coordinater,

$$\rho \cdot e^{i\psi} = r \cdot e^{mi - m\varphi},$$

$$\text{eller } \log \rho + i\psi = mi \cdot \log r - m\varphi,$$

$$\text{hvarur erhålles } \log \rho = -m\varphi, \text{ och } \psi = m \cdot \log r.$$

Om vi nu liksom förut observera, att z bestämmer samma punkt i planet, om dess anomali ökas med 2π , 4π , 6π , så inses (enligt eqvationen $\log \rho = -m\varphi$), att mot hvarje värde på z svarar en oändlig serie af värden på w , hvilka, om z beskriver en omkring origo sluten curva, öfvergå i hvarandra. Beskriver deremot z en sluten curva, som hvarken omger origo, ej heller passerar derigenom, så kommer hvart och ett af de oändligt många w -värdena att återvända till sin utgångspunkt. Eqvationen $\psi = m \cdot \log r$ visar, att alla dessa utgångspunkter ligga på samma räta, genom origo gående linie, emedan ψ har samma värde för dem alla.

Den mångtydighet, som ligger i eqvationen $w = z^{mi}$, är således i flera afseenden olik den, som vi förut lärt känna hos eqvationen $w = z^n$: nemligen dels deri, att det här är likgiltigt, om m är helt tal eller bråk; dels deri, att antalet af olika w -värden, svarande mot samma z -värde, är oändligt, hvilket, om w är $= z^n$, endast inträffar, då n är irrationellt; dels slutligen deri, att dessa olika w -värden här icke ligga på samma, ur origo såsom medelpunkt uppritade, cirkel, utan i stället på samma räta, genom origo dragna linie. Denna sista olikhet vilja vi uttrycka så, att mångtydigheten i det ena fallet är *circulär*, i det andra *lineär*.

Sålänge r är finit och skildt från 0, är äfven ψ finit, och då r hunnit ett maximum eller minimum, gäller detsamma om ψ , så att w då gjort sin största möjliga digression åt ena eller andra sidan och derefter vänder om. Passerar

⁶⁾ Jfr not. 2, sid. 3.

deremot z -curvan genom origo, så att r blir $= 0$, eller aflägsnar den sig oändligt derifrån, så att r blir oändligt, så blir ψ i begge fallen oändligt, och således kommer w att beskrifva oändligt många hvarf omkring origo. Härunder kommer i allmänhet ϱ hvarken att blifva oändligt eller $= 0$, utan det limiterar till ett värde, som bestämmes genom att i eqvationen $\log \varrho = -m\varphi$ insätta för φ den vinkel, som antingen z -curvas tangent i origo eller dess asymptot bildar med fundamentalaxeln. Blir nu φ discontinuerligt, så gäller detsamma om ϱ , d. v. s. w springer öfver från den punkt, dit det förut limiterade, till tvenne andra, som befinna sig på samma räta, genom origo dragna linie, som den förra. Återgår derefter z continuerligt till sin utgångspunkt, så kommer hvarterda af dessa båda w -värden att beskrifva oändligt många hvarf omkring origo i motsatt rigtning, hvarefter det ena af dem limiterar till den punkt, från hvilken denna rot till eqvationen $w = z^{mi}$ utgick, det andra till utgångspunkten för en annan af rötterna till samma eqvation.

Differentieras eqvationerna $\log \varrho = -m\varphi$, och $\psi = m \cdot \log r$, så får man

$$\frac{d\varrho}{\varrho} = -m d\varphi, \text{ och } d\psi = m \frac{dr}{r},$$

$$\text{hvarur genom division erhålles } \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{d\varrho}{d\psi} = -\frac{1}{\frac{1}{r} \cdot \frac{dr}{d\psi}}.$$

Denna eqvation uttrycker geometriskt, att $\cotg. \mathcal{A}^w$ är $= -tg. \mathcal{A}^z$. Man har

$$\text{således antingen } \mathcal{A}^w - \mathcal{A}^z = \frac{\pi}{2}, \text{ eller } \mathcal{A}^w - \mathcal{A}^z = \frac{3\pi}{2}.$$

a) Är m positivt, så måste, enligt eqvationen $\log \varrho = -m\varphi$, ϱ tilltaga, då φ aftager, och tvärtom. Deremot måste, enligt eqvationen $\psi = m \cdot \log r$, ψ och r samtidigt till- och aftaga. Om nu $\mathcal{A}^z$ ligger i första qvadranten, så att både r och φ aftaga (se Fig. 1), måste följaktligen ϱ tilltaga och ψ aftaga. Således ligger i detta fall $\mathcal{A}^w$ i andra qvadranten. På samma sätt finner man, att, om $\mathcal{A}^z$ ligger i andra, tredje och fjerde qvadranten, $\mathcal{A}^w$ måste ligga i tredje, fjerde och första. Vi hafva således här fallet $\mathcal{A}^w - \mathcal{A}^z = \frac{\pi}{2}$.

b) Är deremot m negativt, så måste ϱ och φ samtidigt till- och aftaga; men ψ tilltaga, då r aftager, och tvärtom. Om således i denna händelse $\mathcal{A}^z$ ligger i första qvadranten, så att både r och φ aftaga, måste ϱ aftaga och ψ

tilltaga, till följe hvaraf $\mathcal{A}^w$ ligger i fjärde kvadranten. Ligger åter $\mathcal{A}^z$ i andra, tredje och fjärde kvadranten, så ligger $\mathcal{A}^w$ i första, andra och tredje. Vi hafva här $\mathcal{A}^w - \mathcal{A}^z = \frac{3\pi}{2}$.

III.

Den fullt generella formen för potenser är den, hvarrest exponenten är en complex storhet.

Ponera $w = z^{a+bi}$ så få vi

$$\rho \cdot e^{i\psi} = r^{a+bi} e^{i\varphi(a+bi)} = r^{a+bi} e^{ai\varphi - b\varphi}$$

$$\text{eller } \log \rho + i\psi = a \cdot \log r + bi \cdot \log r + ai\varphi - b\varphi,$$

$$\text{hvarur erhålles } \log \rho = a \cdot \log r - b\varphi, \text{ och } \psi = b \cdot \log r + a\varphi.$$

Här äro, om a är ett brutet tal, de båda föregående fallens mångtydigheter förenade. De oändligt många w -värden, som här motsvara hvarje z -värde, hafva hvarken samma radius vector eller samma anomali. Emellertid är läget för dessa w -värden ingalunda obestämdt, utan de måste alla, såsom vi strax skola se, ligga på samma, ur origo såsom pol uppritade, logarithmiska spiral, hvarföre vi benämna ifrågavarande mångtydighet *spiralisk*.

Eliminera vi nemligen φ , så erhålles

$$a \cdot \log \rho + b\psi = (a^2 + b^2) \cdot \log r,$$

hvarur, om r antages constant, följer

$$\rho = C \cdot e^{-\frac{b}{a}\psi}.$$

Denna eqvation, i hvilken C betyder den constanta storheten $r^{\frac{a^2+b^2}{a}}$, representerar i sjelfva verket den logarithmiska spiral, som $w = z^{a+bi}$ beskriver, under det z beskriver en cirkel, hvars medelpunkt sammanfaller med origo; men deraf följer äfven, att alla de olika w -värden, som motsvara ett på denna cirkel beläget z -värde, måste befinna sig just på samma logarithmiska spiral.

Blir φ discontinuerligt, så inträffar samma förhållande med både ρ och ψ , och ehuru, om härvid r blifver antingen oändligt eller $= 0$, äfven ρ blifver antingen oändligt eller $= 0$, samt ψ måste blifva oändligt, och således discontinuiteten i dessa storheter ej strax är märkbar, får den dock ej negligeras, ej heller får

man anse det likgiltigt, om det tillskott, som φ erhö, betraktas såsom positivt eller negativt. Ty så snart w åter inträder på det finita området, blir olikheten märkbar, i det nemligen, om z derefter återvänder till sin utgångspunkt, hvarje särskildt w -värde i ena fallet återvänder till sin egen utgångspunkt och i det andra går till utgångspunkten för ett annat w -värde.

Differentieras eqvationerna

$$\log \varrho = a \cdot \log r - b\varphi, \text{ och } \psi = b \cdot \log r + a\varphi,$$

så erhåller man

$$\frac{d\varrho}{\varrho} = a \cdot \frac{dr}{r} - b d\varphi, \text{ och } d\psi = b \cdot \frac{dr}{r} + a d\varphi,$$

hvarur genom division framgår

$$\frac{1}{\varrho} \cdot \frac{d\varrho}{d\psi} = \frac{a \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{dr}{d\varphi} - b}{b \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{dr}{d\varphi} + a}.$$

$$\text{Sålendes } \cotg \mathcal{A}^w = \frac{a \cdot \cotg \mathcal{A}^z - b}{b \cdot \cotg \mathcal{A}^z + a};$$

$$\frac{\cos \mathcal{A}^w}{\sin \mathcal{A}^w} = \frac{a \cdot \cos \mathcal{A}^z - b \cdot \sin \mathcal{A}^z}{b \cdot \cos \mathcal{A}^z + a \cdot \sin \mathcal{A}^z};$$

$$b \cdot \cos (\mathcal{A}^w - \mathcal{A}^z) = a \cdot \sin (\mathcal{A}^w - \mathcal{A}^z);$$

$$\tg (\mathcal{A}^w - \mathcal{A}^z) = \frac{b}{a}.$$

Det är ännu ofafgjordt, i hvilken kvadrant vinkeln $(\mathcal{A}^w - \mathcal{A}^z)$ kommer att falla. Vi veta blott, att, då a och b hafva samma tecken, måste den falla antingen i första eller tredje, och, om a och b hafva motsatta tecken, antingen i andra eller fjerde.

a) Antag nu, att både a och b äro positiva. Faller nu $\mathcal{A}^z$ i första kvadranten, så att både r och φ aftaga, så måste, enligt eqvationen $\psi = b \cdot \log r + a\varphi$, äfven ψ aftaga, och således $\mathcal{A}^w$ falla i antingen första eller andra kvadranten. Ligger deremot $\mathcal{A}^z$ i andra kvadranten, så att φ aftager, och r tilltager, så måste, enligt eqvationen $\log \varrho = a \cdot \log r - b\varphi$, ϱ tilltaga, och således $\mathcal{A}^w$ ligga i antingen andra eller tredje. Vi finna i allmänhet, att vinkeln $(\mathcal{A}^w - \mathcal{A}^z)$ här aldrig kan falla i tredje, och således måste falla i första kvadranten, hvarest den till sin storlek vidare bestämmes genom eqvationen $\tg (\mathcal{A}^w - \mathcal{A}^z) = \frac{b}{a}$.

b, c och d) Genom fullkomligt analoga resonnementer finner man, att, om a är negativt och b positivt, $(\mathcal{A}^w - \mathcal{A}^z)$ måste ligga i andra, om både a och b

äro negativa, i tredje och, om a är positivt och b negativt, i fjerde qvadranten, hvarest den alltjemnt närmare bestämmes genom eqvationen $tg(\mathcal{A}^w - \mathcal{A}^z) = \frac{b}{a}$.

Häraf framgår den allmänna sats, af hvilken vi ofvan lärt känna ett par specialfall:

Är $w = z^{a+bi}$, så är $\mathcal{A}^w - \mathcal{A}^z =$ anomalien för den punkt i planet, som exponenten bestämmer.

Denna sats visar, i hvilken riktning w förflyttar sig. Hastigheten, hvarmed denna förflyttning sker, finnes genom att i eqvationen

$$(ds)_w = \varrho \sqrt{\left(\frac{1}{\varrho} d\varrho\right)^2 + (d\psi)^2}$$

insätta de genom ofvanstående differential-eqvationer bestämda värdena på $\frac{1}{\varrho} d\varrho$ och $d\psi$. Härigenom erhålles:

$$(ds)_w = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \frac{\varrho}{r} \cdot (ds)_z.$$

Hastigheten beror således af exponentens radius vector, men är oberoende af dess anomali, hvaremot, såsom vi ofvan sett, riktningen beror af exponentens anomali, men är oberoende af dess radius vector.